

問題関心

数学的手法は、自然現象の分析に欠かせないものになっている。現象を数式で記述し、数学的に解析することにより根底にある法則を把握して現象を予測する、あるいは数学にならって自然科学の理論を体系することが、科学革命期以降、とりわけ積極的に行なわれてきた。こうした操作を通じて新しい微分方程式が発見され、その解法を探ることにより、数学にもまた大きな進歩がもたらされてきた。

17-18 世紀にかけては、このような両者の関係が特に問題になることはなかったように思われる。ところが数学は、そもそも他の自然科学とは大きく異なる独自の特徴を持つ。純粋数学の発展に伴ない、19 世紀には、数学は物理学と切り離された形で整備され始める。この時期において、証明という概念、演繹的な理論体系、仮定や前提条件を以て考察し、それらを緩める方向で議論を進めること、一般化への志向といった要素は、自然現象を扱う力学という学問を体系化するとき、抵抗なく受け入れられたのだろうか。18 世紀後半、Joseph L. Lagrange (1736-1813) の『解析力学』が発表され、それを受けて、William R. Hamilton (1805-65) と Carl G. J. Jacobi (1804-51) による Hamilton-Jacobi 理論の大枠が 19 世紀前半に作られた。自然現象を論じる力学を数学的に扱おうとするとき、3 人は 3 様の態度で両者を関連づけていった。彼らのエネルギー保存則の扱い方に注目して、このことを示していく。

『解析力学』に見る Lagrange の態度

1788 年に出版された『解析力学』は、力学から幾何学的なイメージを一切払拭し、すべての考察を数式の代数的な操作に帰着する、「仮想仕事の原理」を基礎において静力学と動力学を統一的に扱い、演繹的な議論を展開する、という 2 つの特徴をもつ。Lagrange は、非保存系にも適用できるような一般的な原理を基礎におく一方で、Lagrange 方程式・エネルギー保存則・最小作用の原理などを、ポテンシャル関数が存在すること、すなわち保存系であることを「仮定」して導いている。

現実に非保存系が存在するのか、理論を保存系に制限することは力学上どのような意味があるかについては、Lagrange はそれほど問題にせず、整合的な理論を提示するためにそのような仮定を導入したのであった。現象よりも数学的な形式を重んじていた Lagrange に対して、Poisson や Laplace は批判的な見解をとっていた。

Hamilton の力学研究

1834 年および 35 年の論文“ 動力学における数学的方法 ”にみられるように、Hamilton もまた、Lagrange の数学的仮定を伴う議論には否定的であった。Hamilton は Boscovich 原子論を受容し、すべての自然現象は質点系の運動に帰着できるとする。また、活力保存則は全宇宙にわたって成り立つ法則として理解していた。すなわち、彼は、数学的手法の面では、『解析力学』の成果を受継ぎつつ、別の自然観のもとで新しい力学形式を作ったのであった。

Hamilton は、主関数を導入し、これから力学系のすべての性質を導けるとした。この演繹的な形式は、『解析力学』にならったものである。しかし、保存則がみだされる自然界を記述するという立場を貫き、力学形式を作るなかで数学的な視点からの一般化を試みたり仮定を置いたりはしない。保存則を重視するために、主関数がみだす偏微分方程式を

数学的には不自然な連立方程式としたりもしていた。

Jacobi の力学研究

Jacobi は、1836 年、ある制限 3 体問題において、ポテンシャル関数を時間 t を陽に含むものとみなすことにより、新しい積分を見出した。そこで、1837 年、Hamilton の成果をこの場合にも適用できるように拡張し、主関数のみならず方程式は一つで十分なこと、保存系の場合は 2 つ目の方程式を付け加えても矛盾は生じないが、余分であるとした。

1842-43 年の『力学講義』では、ポテンシャル関数が t を陽に含む場合まで含めた Hamilton の理論が提示されている。ただし、Jacobi は上に示した拡張は純粹に数学的な変分問題に適用可能であると位置付け、実際に力学を論じる場面では、変分法の理論に制限をつけ、保存力系に限定して論じていた。Jacobi は、自然現象に即して、力学形式を整備してきた。現象を離れて一般化したものは、数学の理論として力学と区別して扱っていた。

結論

数学形式としての面を見ると、Lagrange・Hamilton・Jacobi は、先行者の成果を受容し、拡張している。しかし、自然現象を記述する際に、数学独自の特徴をどのように取り扱うかという態度に関していえば、3 者はまったく異なっていた。Jacobi の扱い方に、数学と力学の関係を論じる際にとられる、新しい方向が見て取れる。