

ヨハン・ベルヌーイ『水力学』における運動方程式

京都大学文学部 伊藤和行

kito@bun.kyoto-u.ac.jp

Equation of Motion in Johann Bernoulli's *Hydraulica*

Kyoto University Kazuyuki Ito

古典力学は、17世紀にガリレオやホイヘンス、ニュートンらの活動によって誕生したが、我々が知っているような姿を得たのは18世紀後半のことである。18世紀における古典力学の発展に関しては、二つの点を指摘できよう。第一に、『プリンキピア』において、積分の手法を用いずに幾何学的形式で展開されていた理論を解析化し、代数化することである。第二に、質点にのみ適用されていた理論を、剛体や流体といった質点系の問題に対して拡張することだった。

流体力学も18世紀に誕生した分野とすることができ、前半に「ベルヌーイの定理」が提唱され、さらに後半にはオイラーとラグランジュによって二つの形式で基本方程式が与えられている。最初の本格的な流体力学の理論とも言うべき「ベルヌーイの定理」は、それを提唱したベルヌーイ親子の名前を取っていることが知られている。この定理は、まず息子のダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli, 1700-1782) によって、1738年に『動水学』(*Hydrodynamica*) において「活力」(*vis viva*) の保存則を用いて提示され、次いで父のヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli, 1667-1748) によって、『水力学』(*Hydraulica*, in *Opera omnia*, 1742) において、保存則を用いない方法で導出された。

ヨハン・ベルヌーイの『水力学』は、形状が変化する管中の水の運動を論じた著作であるが、冒頭の「序」において、「活力」の概念を用いた間接的な方法によってではなく、力学の基本法則すなわち運動方程式から直接、流体の運動に関する理論が導くことを宣言されている。そのために、ヨハンはまず、ニュートンの『プリンキピア』に従い、「加速力」(*vis acceleratrix*) や「起動力」(*vis motrix*) といった基本概念を定義し、運動の基本方程式を提示する。通過距離を x 、物体の質量を m 、起動力を p 、時間を t とするとき、 $dv = \frac{pdt}{m}$ 、また $dt = \frac{dx}{v}$ であるから、 $dv = \frac{pdx}{mv}$ となる。この式を積分すると、「活力」の保存を表わす式 $\int p dx = \frac{1}{2} m v^2$ が導かれる。ダニエルはこの「活力」の保存に基づいて流体の運動を論じたのに対し、ヨハンは $dv = \frac{pdx}{mv}$ 、すなわち $m v dv = p dx$ を出発点としようというのである。実際には、「パスカルの原理」に基づいて、ある点で流体に働く圧力すなわち「加速力」が大きさをえることなく他の点に伝えられることを用いて、それに断面積を掛けることによって、ある断面における「起動力」を求め、それから運動方程式を導いている。

我々にとって運動方程式とは座標を時間に関して二階微分した形式のもの、たとえば $f_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$ のようなものを指すが、ヨハンにとっては、速度と時間の微分量の関係式 $dv = \frac{pdt}{m}$ だったのであり、実際に問題を解く場面で用いられたのは、速度と距離の微分量の関係式 $dv = \frac{pdx}{mv}$ だった。同様の形式の運動方程式は、レオンハルト・オイラーの『力学』(*Mechanica*, 1736) においても見られ、座標を時間に関して二階微分した形式の運動方程式が現われるのは1740年代後半のオイラーの論文においてである。